Connexité des VA

Gourdon p46 FGN1 p 86.

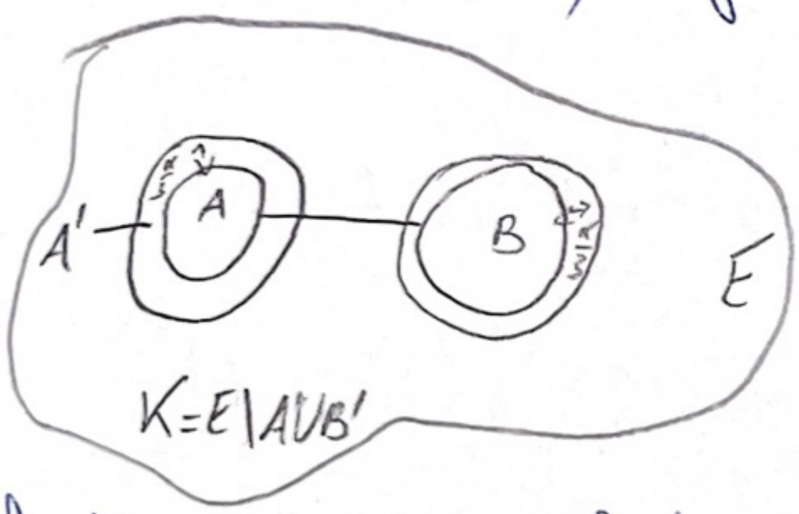
Théorème : Soit (E,d) un espace métrique compact et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $d(U_{n+1}-U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences est connexe.

Preuve :

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note $A_p = \{U_n,\ n\geq p\}$. L'ensemble des VA Γ de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$ $\Rightarrow$ Soit $a\in\Gamma$, alors $\forall p\in\mathbb{N}, \forall\varepsilon>0, \exists n>p, u_n\in B(a,\varepsilon) \Rightarrow A_p\cap B(a,\varepsilon)\neq\emptyset$ donc $\forall p\in\mathbb{N}, a\in\overline{A_p} \Rightarrow a\in\bigcap\overline{A_p}$
$\Leftarrow$ Soit $a\in\bigcap\overline{A_p}$. Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$, $a\in\overline{A_N}$ donc $\forall\varepsilon>0, \exists n\geq N, u_n\in B(a,\varepsilon) \Rightarrow a\in\Gamma$.

Γ est donc fermé dans E compact, donc Γ est compact.

Supposons par l'absurde que Γ n'est pas connexe : $\Gamma = A\cup B$ où A et B fermé non vide disjoint de Γ
Comme Γ est compact, A et B le sont aussi et donc $\alpha = d(A,B) > 0$ $x\mapsto d(x,B)$ continue sur A compact, donc borné et atteint ses bornes, $\exists x_0\in A$, $d(x_0,B)=d(A,B)$
Notons $A' = \{x\in E \mid d(x,A) < \frac{\alpha}{3}\}$ et $B' = \{x\in E \mid d(x,B) < \frac{\alpha}{3}\}$ ce sont des ouverts
donc $K = E\setminus(A'\cup B')$ est fermé dans E compact, donc compact.



Montrons que (U_n) admet au moins une valeur d'adhérence dans K ce qui sera absurde car $\Gamma\cap K=\emptyset$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} d(U_{n+1},U_n)=0$ donc $\exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_0\ d(U_n,U_{n+1})<\frac{\alpha}{3}$

Soit $N\in\mathbb{N}$, $N>N_0$. Soit $x_0\in A$ et $y_0\in B$
x_0 est valeur d'adhérence de $(U_n)_n$ donc $\exists n_1>N$ tel que $d(x_0,u_{n_1})<\frac{\alpha}{3} \Rightarrow u_{n_1}\in A'$
y_0 est ——— $\exists n_2>n_1$ tel que $d(y_0,u_{n_2})<\frac{\alpha}{3} \Rightarrow u_{n_2}\in B'$
Notons n_0 le premier entier supérieur à n_1 tel que $u_{n_0}\notin A'$ (existe car $u_{n_2}\notin A'$)
On a : $u_{n_0-1}\in A'$ donc
$$\begin{aligned} d(u_{n_0},B) &\geq d(u_{n_0-1},B) - d(u_{n_0-1},u_{n_0}) \\ &\geq \underbrace{d(A,B)}_{=\alpha} - \underbrace{d(u_{n_0-1},A)}_{>\frac{\alpha}{3}} - \underbrace{d(u_{n_0-1},u_{n_0})}_{>\frac{\alpha}{3}} \\ &> \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

Donc $u_{n_0}\notin B'$ et comme $u_{n_0}\notin A'$, on a $u_{n_0}\in K$.

Nous venons donc de montrer que $\forall N\geq N_0, \exists n_0\geq N, u_{n_0}\in K$. On peut donc construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (U_n) qui prend ses valeurs dans K.
Comme K compact, $(u_{\varphi(n)})$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K, donc (U_n) admet
C'est impossible car $\Gamma\cap K=\emptyset$. Donc Γ est connexe.

Application : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = U_{n+1}$ - Alors (U_n) converge $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \to 0$

Preuve :

$\Rightarrow$ immédiat

$\Leftarrow$ On note Γ l'ensemble des VA de $(U_n)_n$, par ce qui précède, Γ est compact et connexe c'est donc un intervalle fermé de $[0,1]$.

De plus, Γ est constitué des points fixes de f : Soit $a \in \Gamma$, $\exists (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \lim u_{\varphi(n)+1} \quad \text{car } u_{n+1} - u_n \to 0$$
$$= \lim f(u_{\varphi(n)})$$
$$= f(a) \quad \text{par continuité de } f.$$

Supposons par l'absurde que (U_n) ait 2 valeurs d'adhérences α et β, $\alpha < \beta$.

Alors $[\alpha,\beta] \subset \Gamma$ et $\frac{\alpha+\beta}{2} \in \Gamma$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} \in [\alpha,\beta]$ or $u_{n_0} \in \Gamma$.

Donc $u_{n+1} = f(u_{n_0}) = u_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$, donc (U_n) converge ce qui est absurde car 2VA

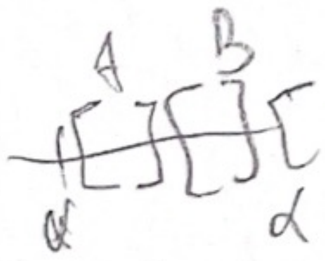
Ainsi, (U_n) possède 1 VA donc converge.

$\mathbb{R}$ est connexe : Si $\mathbb{R} = A \sqcup B$ (fermés), soit $a \in A$, $b \in B$ et $c = \sup\{x \mid x \in [a,b] \cap A\}$

c est bien def car $[a,b] \cap A \neq \emptyset$ ($a \in [a,b] \cap A$) et on a $c < b$.

Or comme A est fermé, $c \in A$.
Or $]c,d] \subset B$ et comme B est fermé, $c \in B$ $\Big\}$ $\Rightarrow c \in A \cap B$ impossible.

$$\Downarrow$$
$$\overline{]c,d]} \subset \overline{B} = B$$



$]\alpha,\beta] = A \cup B$, $c = \sup\{x \mid x \in [a,b] \cap A\}$